

sin θ に関する重要な不等式

sin θ に関する重要な不等式

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ で,

$$\frac{2}{\pi}\theta < \sin \theta < \theta$$

となることを示せ.

Proof. $\sin \theta < \theta$ は明らか. $\frac{2}{\pi}\theta < \sin \theta$ を示す.

$y(\theta) = \sin \theta - \frac{2}{\pi}\theta$ と置くと,

$$y'(\theta) = \frac{dy}{d\theta} = \cos \theta - \frac{2}{\pi} \quad (1)$$

$$y''(\theta) = \frac{d^2y}{d\theta^2} = -\sin \theta \quad (2)$$

より, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ で $y''(\theta) < 0$ かつ $y'(0) = 1 - \frac{2}{\pi} > 0$, かつ $y'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{2}{\pi} < 0$ より, ある $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ で $y(\theta)$ は最大値をとる. そこで増減表を書いてみると,

θ	0		θ_0		$\frac{\pi}{2}$
y'	+	+	0	-	-
y	0	↗		↘	0

となるので, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ で $y(\theta) > 0$ すなわち, $\frac{2}{\pi}\theta < \sin \theta$ が示された. □