多変数関数のテイラー展開

ここでは，数学書レベルの厳密性は考慮せずに多変数関数のテイラー展開を求めます．まず，多変数関数のテイラー展開の表式を与えます．

定理 0.0.1.
関数 $f(x_1, \ldots, x_n)$ が各変数に関して何回でも微分可能とする．このとき，点 $(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ におけるテイラー展開は,

$$\begin{aligned} &f(x_1, \ldots, x_n) \\ &= \sum_{m_1, \ldots, m_n = 0}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i!} \frac{\partial^{m_i}}{\partial x_i^{m_i}} \right) f \Bigg|_{\substack{(x_1, \ldots, x_n) \\ = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}} \prod_{j=1}^{n} (x_j - \alpha_j)^{m_j} \end{aligned}$$

となる．

・・・一般性を重視した結果, 見たこともない？　複雑な数式になってしまいましたが，この公式から 2 変数の場合を $\prod$ 記号を用いないで表すのは簡単です．$n = 2$ ですから，$x_1 = x, x_2 = y, \alpha_1 = a, \alpha_2 = b, m_1 = m, m_2 = n$ とすれば，上の式は,

$$
\begin{aligned}
&f(x,y)\\
&=f(x_1,x_2)\\
&=\sum_{m_1,m_2=0}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{2}\frac{1}{m_i!}\frac{\partial^{m_i}}{\partial x_i^{m_i}}\right)f\Bigg|_{\substack{(x_1,x_2)\\=(\alpha_1,\alpha_n)}}\prod_{j=1}^{2}(x_j-\alpha_j)^{m_j}\\
&=\sum_{m_1,m_2=0}^{\infty}\frac{1}{m_1!}\frac{\partial^{m_1}}{\partial x_1^{m_1}}\frac{1}{m_2!}\frac{\partial^{m_2}}{\partial x_2^{m_2}}f\Bigg|_{\substack{(x_1,x_2)\\=(\alpha_1,\alpha_n)}}(x_1-\alpha_1)^{m_1}(x_2-\alpha_2)^{m_2}\\
&=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{1}{m!n!}\frac{\partial^{m}}{\partial x^{m}}\frac{\partial^{n}}{\partial y^{n}}f\Bigg|_{\substack{(x,y)\\=(a,b)}}(x-a)^m(y-b)^n
\end{aligned}
$$

より，

2 変数関数のテイラー展開

$$
f(x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{1}{m!n!}\frac{\partial^{m}}{\partial x^{m}}\frac{\partial^{n}}{\partial y^{n}}f(x,y)\Bigg|_{\substack{(x,y)\\=(a,b)}}(x-a)^m(y-b)^n
$$

が 2 変数のテイラー展開となります．それでは，次に，この定理の証明を考えましょう．まず，2 変数のマクローリン展開を与えます．マクローリン展開は原点を中心とするテイラー展開でした．

定理 0.0.2.
関数 $f(x_1,\ldots,x_n)$ が各変数に関して何回でも微分可能とする．このとき，マクローリン展開は,

$$\begin{aligned} &f(x_1,\ldots,x_n) \\ &= \sum_{m_1,\ldots,m_n=0}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i!} \frac{\partial^{m_i}}{\partial x_i^{m_i}} \right) f \Bigg|_{\substack{(x_1,\ldots,x_n)\\=(0,\ldots,0)}} \prod_{j=1}^{n} x_j^{m_j} \end{aligned} \tag{1}$$

となる．

証明

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{m_1,\ldots,m_n=0}^{\infty} c_{m_1,\ldots,m_n} \prod_{i=1}^{n} x_i^{m_i} \tag{2}$$

と展開できたとする．このとき，係数 $c_{m_1,\ldots,m_n}$ が全て求められれば良い．和をとっている小文字の添字 m と区別するため，ある固定した添字 $M_1,\ldots,M_n$ について，$c_{M_1,\ldots,M_n}$ を式 (2) を用いて，求めることを考えよう．$c_{M_1,\ldots,M_n}$ は，$\prod_{i=1}^{n} x_i^{M_i}$ の係数です．いま，この両辺を x_i たちで適当な回数だけ微分して全ての x_i に 0 を代入したものは，そのとき定数項だった部分，つまり全ての x_i の 0 次の項だけが残る．このことに注意すると，$c_{M_1,\ldots,M_n}$ が定数項になるように $f(x_1,\ldots,x_n)$ を x_i たちで適当な回数微分して，最後に $x_1 =, \cdots, = x_n = 0$ を代入すれば，$c_{M_1,\ldots,M_n}$ に関する項のみを含んだ項が取り出せるはずです．係数 $c_{M_1,\ldots,M_n}$ を持つ項の x_i に関する次数は M_i だったから，両辺を全ての $i = 1,\ldots,n$ に対して x_i で M_i 回

偏微分してみよう．すると，

$$
\begin{aligned}
&\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{\partial^{M_i}}{\partial x_i^{M_i}}\right)f \\
&=\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{\partial^{M_i}}{\partial x_i^{M_i}}\right)\sum_{m_1,\dots,m_n=0}^{\infty}c_{m_1,\dots,m_n}\prod_{i=1}^{n}x_i^{m_i} \\
&=\sum_{m_1,\dots,m_n=0}^{\infty}c_{m_1,\dots,m_n}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{\partial^{M_i}}{\partial x_i^{M_i}}\right)\prod_{i=1}^{n}x_i^{m_i}
\end{aligned}
$$

ここで，$\prod$ の中身の各 $\frac{\partial^{M_i}}{\partial x_i^{M_i}}$ は，x_i にしか作用しないから，それぞれを，x_i だけに掛けさせることができる．すると，

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{m_1,\dots,m_n=0}^{\infty}c_{m_1,\dots,m_n}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{\partial^{M_i}}{\partial x_i^{M_i}}\right)\prod_{i=1}^{n}x_i^{m_i} \\
&=\sum_{m_1,\dots,m_n=0}^{\infty}c_{m_1,\dots,m_n}\prod_{i=1}^{n}\frac{\partial^{M_i}}{\partial x_i^{M_i}}x_i^{m_i}
\end{aligned}
$$

ここで，この両辺に $x_1 =, \cdots, x_n = 0$ を代入する．すると，生き残る項は係数 $c_{M_1,\dots,M_n}$ を持つ項だけだったから，

$$
\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{\partial^{M_i}}{\partial x_i^{M_i}}\right)f\Bigg|_{\substack{x_1,\dots,x_n)\\=(0,\dots,0)}}=c_{M_1,\dots,M_n}\prod_{i=1}^{n}\frac{\partial^{M_i}}{\partial x_i^{M_i}}x_i^{M_i}=c_{M_1,\dots,M_n}\prod_{i=1}^{n}M_i!
$$

これより，添字を入れ替えて，

$$
\begin{aligned}
c_{M_1,\dots,M_n}&=\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}M_i!}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{\partial^{M_i}}{\partial x_i^{M_i}}\right)f\Bigg|_{\substack{x_1,\dots,x_n)\\=(0,\dots,0)}} \\
&=\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{M_i!}\frac{\partial^{M_i}}{\partial x_i^{M_i}}\right)f\Bigg|_{\substack{x_1,\dots,x_n)\\=(0,\dots,0)}}
\end{aligned}
$$

これより，$c_{M_1,\dots,M_n}$ が求まったので，マクロ―リン展開は，

$$
\begin{aligned}
&f(x_1,\dots,x_n)\\
&=\sum_{m_1,\dots,m_n=0}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{m_i!}\frac{\partial^{m_i}}{\partial x_i^{m_i}}\right)f\Bigg|_{\substack{(x_1,\dots,x_n)\\=(0,\dots,0)}}\prod_{j=1}^{n}x_j^{m_j}
\end{aligned}
$$

となることが分かった. □

次にテイラー展開ですが，これはマクローリン展開の全ての x_i について原点を α_i にシフトするだけです．つまり，$x_i=0\to x_i=\alpha_i, x_i\to x_i-\alpha$ とすればただちに得られます.

これより，多変数のマクローリン展開と，テイラー展開を得ました.