非可換群でも右逆元は左逆元になることの証明

ここでは HatenaBlog で『相対性理論を学びたい人のために』というブログを開設していらっしゃるＥＲＯＩＣＡさんに当サイト管理人竜太が教わった，表題の件について書きたいと思います．もしかしたら群論の初歩的事実なのかもしれませんが，基礎を大切にすると，これだけ簡単な条件（群の性質）だけで，表題の事実が示せるということでエレガントだと思います．なお，この記事は私が自己流に証明を書き直してあるので，万が一誤植やミスがあったとしてもすべて私の責任です．（とはいえ，簡単な証明ですからまず大丈夫だとはおもうのですが…）

まず，前提条件として，G が群であるための定義として通常通り**結合法則**は仮定します．ここで一部の書籍では，いきなり，両側単位元と両側逆元を仮定するものも見られますが，今回は，それぞれ右側単位元，右側逆元だけを仮定します．すなわち，ある $e \in G$ が存在して

$$\forall x \in G, xe = x \tag{1}$$
$$\forall x \in G, \exists x' \in G, xx' = e \tag{2}$$

を満たすものとします．ここで，これだけではこの条件を満たす e の一意性はまだ明らかではありませんが，この後の証明で実は一意にしか選べないことが示されます．

示したいのは次の 2 つです．

$$\forall x \in G, ex = x \tag{3}$$
$$\forall x \in G, \exists x' \in G, x'x = e \tag{4}$$

それでは，まず式 (3) を証明してみます．ポイントは任意の $x \in G$ に対して $xx' = e$ なる $x' \in G$ が存在するのだから，あべこべにその x' に対しても $x'(x')' = e$ なる $(x')' \in G$ が存在するということです．

$$\begin{aligned}
ex =& e(xe)\\
=& ex[x'(x')']\\
=& e(xx')(x')'\\
=& (ee)(x')'\\
=& e(x')'\\
=& xx'(x')'\\
=& xe\\
=& x
\end{aligned}$$

$x \in G$ は任意だったのでこれで (3) が示せました．次に 4) を示します．

$$\begin{aligned}
x'x =& x'(xe)\\
=& x'x[x'(x')']\\
=& x'(xx')(x')'\\
=& x'e(x')'\\
=& x'(x')'\\
=& e
\end{aligned}$$

先ほどと同様任意の $x \in G$ についてこれが成り立つので，これで (4) が示されました．

さて，最後にここに示した単位元 $e \in G$ と任意の元 $x \in G$ に対する逆元の一意性を示してこの記事は終わりにします．

まず，単位元の一意性です．・・・と言っても式だけ書くとやや意味不明かもしれませんので言葉で補います．$\iota \in G$ と $e \in G$ をそれぞれ G の両側単位元とすると，実は $\iota = e$ であることを示します．

まず，e は単位元なので

$$\iota = \iota e \tag{5}$$

次に ι も単位元なので

$$\iota e = e \tag{6}$$

よって，式 (5) 及び (6) より，

$$\iota = e \tag{7}$$

が示されました．次は逆元の一意性です．これは，

$$x\alpha = \alpha x = e \tag{8}$$
$$x\beta = \beta x = e \tag{9}$$

とするとき，$\alpha = \beta$ を示します．

$$\beta = \beta e = \beta(x\alpha) = (\beta x)\alpha = e\alpha = \alpha$$

より示せました．こうして，単位元も逆元も一意性が示せたので，通常それぞれ単位元を e，x の逆元を x^{-1} などと表します．

この記事では，右側単位元と右側逆元のみを仮定しましたが，対称性より，左側単位元と左側逆元を仮定しても同じことが言えます．一方，右側単位元と左側逆元の存在のように，右左が一致しない場合には，この命題のような主張はできません．