

直積を表す新しい記号の提案

次のような状況を考えてみよう．

\mathbb{R}^N の半開区間 I は ν 番目だけ $(a, b]$ で、それ以外はすべて $(0, 1]$ とする．
さてみなさんはどのようにこの I を式で表すだろうか？

普通のやり方だと、恐らく、

$$I = (0, 1] \times \cdots \times (0, 1] \times \overset{\nu\text{番目}}{(a, b]} \times (0, 1] \times \cdots \times (0, 1] \quad (1)$$

などと書くか、1行で定義することをあきらめて、

$$A_k = \begin{cases} (0, 1] \cdots k \neq \nu \text{のとき} \\ (a, b] \cdots k = \nu \text{のとき} \end{cases} \quad (2)$$

とするとき、

$$I = \prod_{k=1}^N A_k = A_1 \times \cdots \times A_N$$

などと書くしか方法はなさそうです．しかし、(1) は、書くのがやや大変な上に、 $\nu = 1$ または $\nu = N$ などの場合この書き方はやや変です．一方、(2) の書き方では、一行で書くことができない上に、 $\prod_{k=1}^N A_k$ の部分が通常の掛け算のように見えやすいという欠点もあります．教科書などで、このような表記を見るたびにため息が出てしまいます．また、実際問題、恐らく今までの表記法で上の I が簡単に書けないためなのでしょうが、 $\nu = 1$ の成分だけ $(a, b]$ とする、などとして、 $\nu \neq 1$ のときも同様である．などとして、一般の ν での証明をごまかしている場合もよくあります．こう考えると、もし(1) や(2) で表されている I を、任意の ν ($1 \leq \nu \leq N$) の成分だけ $(a, b]$ であるとする場合について、1行で、一般性を失うことなく、すっきりと表せれば、論文発表とかでは使えないにしても、自分でノートをまとめるなどといった際には重宝することになるかと思います．そこでここでは、それを表す記号法の提案をしてみたいと思います．

さて、新しい記号法を導入するかどうかを考えると、注意すべき点が少なくとも3つあります。それは、

1. 既存の記号法で、すでに十分スマートにあらわせないか？
2. その記号法は表す対象にあった合理的な記号法と言えるか？
3. 既存の記号法と互換性があるか？あるいは既存の記号法から容易にその意味がくみ取れるか？（もし可能なら）

今回の場合、既存の方法ではスマートにあらわせないので、条件1は満たしています。そこで、最低限2を満たし、もし可能であれば、3も満たす記号法を考えてみましょう。

まず、私が考えた記号法で前頁の I を書いてみると次のようになります。

$$I = \prod_{\substack{1 \leq k \leq N \\ k \neq \nu}} (0, 1] \Big|_k \times (a, b] \Big|_\nu \quad (3)$$

取りあえずコンパクトに書いていることは見て取れると思います。意味を見てみると、通常、 $A_1 \times A_2 \Big|_1 = A_1$ のように、 $\Big|_k$ は直積に作用させるとその第 k 成分を取り出す働きがあるのに対し、私の記号法では、第 k 成分であることを明記するために使っています。私が行った修正点はほぼそれだけです。後は、直積の記号を数の積と紛らわしい $[\]$ を使わずに、 $A \times B$ に使うのと同じ記号 \times を使って、一般の直積を表しています。また、 $k = \nu$ 番目を飛ばした場合も一目瞭然かと思えます。念のため、この記号法の定義を書くと、

$$I = \prod_{k \in \Lambda} A_k \Big|_k \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall k \in \Lambda, I \Big|_k = A_k \quad (4)$$

となります。定義式の中の $A_k \Big|_k$ がやや煩わしいですが、たとえば $A_k = (0, 1/k]$ などとなっているときに $(0, 1/k]$ をどのように並べるのか？などで悩まないための処置なのでこれは仕方がないというより当然の結果です。この記号は、次のように重ねることもできます。

$$\prod_{1 \leq k \leq m} A_k \Big|_{2k-1} \times \prod_{1 \leq k \leq m} B_k \Big|_{2k} = A_1 \times B_1 \times A_2 \times B_2 \times \cdots \times A_m \times B_m \quad (5)$$

注意しないとイケないのは、積の最初の成分の添字の動く範囲と後の成分の添字の動く範囲の共通部分があってはならない点です。今の例だと、ちゃんと奇数と偶数に分かれています。

如何だったでしょうか？個人的にはこの記号法は先に述べた 2, 3 の条件も満たしていると思うので、かなり有効な記号法かと思っております。なお、いうまでもなく、この記号法は私が勝手に考えた記号法なので、もし使ってみる際には全て自己責任でお願いします。悪くない記号法と、個人的には思っておりますが、社会のルールで受け入れられない場合がありますので十分注意してください。