上極限・下極限

実数の集合 M に対し，次のように上限・下限を定める．

集合の上限の定義

M を実数からなる集合とするとき，

$$\begin{aligned}&\alpha = \sup M\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}\text{条件 1.} \quad \forall x \in M, \alpha \geq x\\ \text{条件 2.} \quad \forall \delta > 0, \exists x \in M, x > \alpha - \delta\end{cases}\end{aligned}$$

この α を M の上限と呼ぶ．

集合の下限の定義

M を実数からなる集合とするとき，

$$\begin{aligned}&\alpha = \inf M\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}\text{条件 1.} \quad \forall x \in M, \alpha \leq x\\ \text{条件 2.} \quad \forall \delta > 0, \exists x \in M, x < \alpha + \delta\end{cases}\end{aligned}$$

この α を M の下限と呼ぶ．

実数の連続性より，上限および下限は M の選び方によらず必ず存在する．

次に実数列 $\{a_n\}$ に対して上限・下限を定める．

数列の上限の定義

$\{a_\nu\}$ を実数からなる数列とするとき,

$$\begin{aligned}\alpha &= \sup_{\nu \geq n} a_\nu \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{条件 } 1. \quad \forall \nu \geq n, \alpha \geq a_\nu \\ \text{条件 } 2. \quad \forall \delta > 0, \exists \nu \geq n, a_\nu > \alpha - \delta \end{cases}\end{aligned}$$

特に $n = 1$ のとき，この α を数列 $\{a_\nu\}$ の上限と呼ぶ.

数列の下限の定義

$\{a_\nu\}$ を実数からなる数列とするとき,

$$\begin{aligned}\alpha &= \inf_{\nu \geq n} a_\nu \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{条件 } 1. \quad \forall \nu \geq n, \alpha \leq a_\nu \\ \text{条件 } 2. \quad \forall \delta > 0, \exists \nu \leq n, a_\nu < \alpha + \delta \end{cases}\end{aligned}$$

特に $n = 1$ のとき，この α を数列 $\{a_\nu\}$ の下限と呼ぶ.

実数の連続性より，上限および下限は $\{a_\nu\}$ の選び方によらず必ず存在する.

この定義により，次の上極限・下極限が定義される.

数列の上極限の定義

$$\varlimsup_{n \in \mathbb{N}} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\nu \geq n} a_\nu$$

数列の下極限の定義

$$\varliminf_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{\nu \geq n} a_\nu$$

次の定理は重要である.

数列の上極限と下極限の関係性の定理

$$\underline{\lim}_{n\in\mathbb{N}} \leq \overline{\lim}_{n\in\mathbb{N}}$$

この定理の証明には次の補題を使う．

補題

$$\Big[\forall\alpha < a, \alpha < b\Big] \Rightarrow a \leq b$$

補題の証明．対偶を示す．

$$\Big[\forall\alpha < a, \alpha < b\Big] \Rightarrow a \leq b$$

の対偶は

$$a > b \Rightarrow \Big[\exists\alpha < a, \alpha \geq b\Big]$$

である．これを示す．$\alpha = \dfrac{a+b}{2}$ と置く．すると，

$$a = \frac{a+a}{2} > \frac{a+b}{2} = \alpha$$

であるが，この α は

$$b = \frac{b+b}{2} < \frac{a+b}{2} = \alpha$$

より，$\alpha \geq b$ である．したがって対偶が示せた． □

定理の証明．補題より，任意の α に対して，

$$\alpha < \underline{\lim}_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow \alpha < \overline{\lim}_{n\in\mathbb{N}}$$

を示せばよい．

$$
\begin{aligned}
\alpha < \varliminf_{n\in\mathbb{N}} = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf_{\nu\geq n} a_\nu\right) &\Rightarrow \exists n\in\mathbb{N}, \inf_{\nu\geq n} a_\nu > \alpha \\
&\Rightarrow \exists n\in\mathbb{N}, \forall\nu\geq n, a_\nu > \alpha \\
&\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}, \exists\nu\geq n, a_\nu > \alpha \\
&\Rightarrow \alpha < \varlimsup_{n\in\mathbb{N}}
\end{aligned}
$$

以上より，任意の α に対して，

$$\alpha < \varliminf_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow \alpha < \varlimsup_{n\in\mathbb{N}}$$

が示せたので，

$$\varliminf_{n\in\mathbb{N}} \leq \varlimsup_{n\in\mathbb{N}}$$

が示せた． □

集合列の上極限と下極限

集合列に対しても数列と同様にして上極限・下極限を定義できる．

集合列の上極限の定義

$$\varlimsup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{\nu\geq n} A_\nu$$

集合列の下極限の定義

$$\varliminf_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{\nu\geq n} A_\nu$$

集合列の上極限・下極限に対しても数列の場合と同様の次の定理が成り立つ．

数列の上極限と下極限の関係性の定理

$$\varliminf_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \varlimsup_{n\in\mathbb{N}}$$

定理の証明.

$$\begin{aligned}
a \in \varliminf_{n\in\mathbb{N}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{\nu\geq n} A_\nu &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, a \in \bigcap_{\nu\geq n} A_\nu \\
&\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \forall \nu \geq n, a \in A_\nu \\
&\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists \nu \geq n, a \in A_\nu \\
&\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a \in \bigcup_{\nu\geq n} A_\nu \\
&\Leftrightarrow a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{\nu\geq n} A_\nu = \varlimsup_{n\in\mathbb{N}} A_n
\end{aligned}$$

よって，任意の a に対して，

$$a \in \varliminf_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow a \in \varlimsup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

だから，

$$\varliminf_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \varlimsup_{n\in\mathbb{N}}$$

が示せた．上の証明の 2 行目から 3 行目への変形は詳しくは次による．

$$\begin{aligned}
&\exists n \in \mathbb{N}, \forall \nu \geq n, a \in A_\nu \\
&\Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \forall \nu : (\nu \geq n \land \nu \geq N), a \in A_\nu \\
&\Rightarrow \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \exists \nu : (\nu \geq n \land \nu \geq N), a \in A_\nu \\
&\Rightarrow \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \exists \nu : (\nu \geq N), a \in A_\nu \\
&\Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{N}, \exists \nu \geq N, a \in A_\nu \\
&\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists \nu \geq n, a \in A_\nu
\end{aligned}$$

$\square$