ヘビサイドの階段関数の積分表示式

実関数 $\theta(t)$ が

ヘビサイドの単位ステップ関数

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t > 0) \end{cases}$$

を満たすとき，この関数 $\theta(t)$ をヘビサイド関数，ステップ関数，あるいはこの和名をとって階段関数と呼ぶ．この関数は y 軸，つまり $t = 0$ を境にして，高さ 0 から高さ 1 に上がるので，明示的に単位ステップ関数とも呼ぶ．単位ステップ関数は積分を用いて，次のように表せる．

単位ステップ関数の積分表示式

$$\theta(t) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - i\varepsilon} d\omega$$

ここでは，この公式を証明する．証明に使うのは次の 2 つの定理である．

コーシーの積分定理

C を単連結閉曲線とする．$f(z)$ が C 上及びその内部で正則とするとき，次が成り立つ．

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

コーシーの積分公式

C を単連結閉曲線とする．$f(z)$ が C 上及びその内部で正則とし，a を C の内部の点とするとき，次が成り立つ．

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - a} dz$$

Proof. 証明は $t < 0$ の場合と $t > 0$ の場合別々に行う．

$t < 0$ **のとき**　図 1 の閉曲線 $C = C_1 + C_2$ をとる．

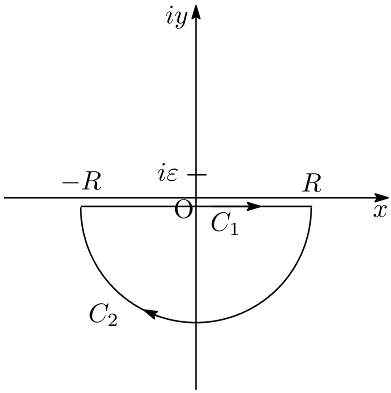

図 1　$t < 0$ のときの積分路

関数

$$f(z) = \frac{e^{itz}}{z - i\varepsilon}$$

の極は e^{itz} が z 平面全体で正則であることより，$z - i\varepsilon = 0$，つまり，$z = i\varepsilon$ しかなく，それ以外の点全てで正則である．いま，$\varepsilon > 0$ より，閉曲線 C 内にこの極 $z = i\varepsilon$ は含まれていないから，結局，閉曲線 $C = C_1 + C_2$ 上とその内部で，$f(z)$ は正則となる．したがって，コーシーの積分定理より，

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1+C_2} \frac{e^{itz}}{z - i\varepsilon}dz = \int_{C_1} \frac{e^{itz}}{z - i\varepsilon}dz + \int_{C_2} \frac{e^{itz}}{z - i\varepsilon}dz = 0$$

が成り立つ．ここで項

$$\int_{C_1} \frac{e^{itz}}{z - i\varepsilon}dz$$

について見てみると，C_1 は実軸の $x = -R$ から $x = +R$ までの線積分だ

から

$$\int_{C_1} \frac{e^{itz}}{z - i\varepsilon} dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{itx}}{x - i\varepsilon} dx$$

となる．したがって $R \to \infty$ でこの積分は,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x - i\varepsilon} dx$$

に一致する．次にもう一つの項

$$\int_{C_2} \frac{e^{itz}}{z - i\varepsilon} dz$$

について見てみる．これは

$$z = Re^{-i\theta} \qquad (\theta : 0 \to \pi)$$

を積分路とする積分であるが，いま，t が負なので分かりやすいように正の数 s を使って，$t = -s$ と表すことにすると,

$$dz = -iRe^{-i\theta} d\theta$$

より,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{C_2} \frac{e^{itz}}{z - i\varepsilon} dz \right| &\leq \int_{C_2} \frac{|e^{-isz}|}{|z| - |i\varepsilon|} |dz| \\
&\leq \int_0^{\pi} \frac{|e^{-is(R\cos\theta - iR\sin\theta)}|}{R - \varepsilon} R d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \frac{|e^{-isR\cos\theta}||e^{-sR\sin\theta}|}{R - \varepsilon} R d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \frac{e^{-sR\sin\theta}}{R - \varepsilon} R d\theta
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで $R \to \infty$ の極限をとると，

$$
\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\left|\int_{C_2}\frac{e^{itz}}{z-i\varepsilon}dz\right| &\leq \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{e^{-sR\sin\theta}}{R-\varepsilon}Rd\theta \\
&=\int_0^{\pi}\lim_{R\to\infty}\frac{e^{-sR\sin\theta}}{1-\dfrac{\varepsilon}{R}}d\theta \\
&=\int_0^{\pi}0d\theta \\
&=0
\end{aligned}
$$

以上より，結局 $t<0$ のとき，

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}}{x-i\varepsilon}dx=0$$

が言えたので，

$$\theta(t)=0=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}}{x-i\varepsilon}dx$$

が言えた．

$t>0$ **のとき**　図 2 の閉曲線 $C=C_1+C_3$ をとる．

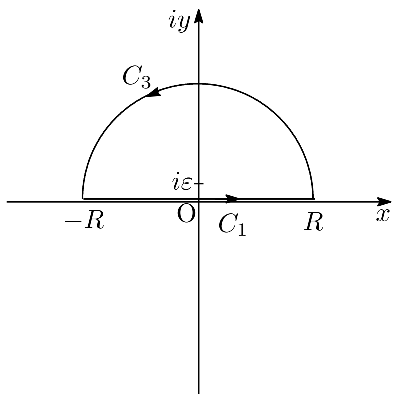

図 2　$t>0$ のときの積分路

関数

$$f(z) = e^{itz}$$

は z 平面全体で正則だから特に単連結閉曲線 $C = C_1 + C_3$ 上とその内部で正則である．また，点 $z = i\varepsilon$ は閉曲線 C の内部の点だから，コーシーの積分公式より，

$$\begin{aligned} e^{it(i\varepsilon)} = f(i\varepsilon) =& \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz \\ =& \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1+C_3} \frac{e^{itz}}{z-i\varepsilon}dz \\ =& \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{e^{itz}}{z-i\varepsilon}dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_3} \frac{e^{itz}}{z-i\varepsilon}dz \end{aligned}$$

さてここで，左辺は $\varepsilon \to +0$ で明らかに 1 になる．また右辺第 1 項は $t < 0$ のとき説明した，同じ積分路 C_1 なので，$R \to \infty$ で

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x-i\varepsilon}dx$$

になる．第 2 項は

$$z = Re^{i\theta} \qquad (\theta : 0 \to \pi)$$

を積分路とする積分であるが，いま，

$$dz = iRe^{i\theta}d\theta$$

より，

$$\begin{aligned} \left|\int_{C_3} \frac{e^{itz}}{z-i\varepsilon}dz\right| \le& \int_{C_3} \frac{|e^{itz}|}{|z|-|i\varepsilon|}|dz| \\ \le& \int_0^\pi \frac{|e^{it(R\cos\theta + iR\sin\theta)}|}{R-\varepsilon}Rd\theta \\ =& \int_0^\pi \frac{|e^{itR\cos\theta}||e^{-tR\sin\theta}|}{R-\varepsilon}Rd\theta \\ =& \int_0^\pi \frac{e^{-tR\sin\theta}}{R-\varepsilon}Rd\theta \end{aligned}$$

ここで $R \to \infty$ の極限をとると，

$$
\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\left|\int_{C_3}\frac{e^{itz}}{z-i\varepsilon}dz\right| \leq& \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{e^{-tR\sin\theta}}{R-\varepsilon}Rd\theta \\
=& \int_0^{\pi}\lim_{R\to\infty}\frac{e^{-tR\sin\theta}}{1-\dfrac{\varepsilon}{R}}d\theta \\
=& \int_0^{\pi}0d\theta \\
=& 0
\end{aligned}
$$

以上より，結局 $t>0$ のとき，

$$
\theta(t) = 1 = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}}{x-i\varepsilon}dx
$$

が言えた．よって，$t>0$ の場合と $t<0$ の場合のいずれにおいても，

$$
\theta(t) = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}}{x-i\varepsilon}dx
$$

が成り立つことが示せた．文字を置き換えると，

$$
\theta(t) = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}}{\omega-i\varepsilon}d\omega
$$

である． □

なお，直感的に明らかかも知れないが，単位ステップ関数を微分すると，ディラックのデルタ関数になることが積分表示式の形で分かる．

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\theta(t) =& \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\omega e^{i\omega t}}{\omega-i\varepsilon}d\omega \\
=& \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}}{1-i\dfrac{\varepsilon}{\omega}}d\omega \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}d\omega = \delta(t)
\end{aligned}
$$