第 1 章

複素解析入門

1.1 留数まで一気に解説！

以下断らない限り単一閉曲線の向きは全て正の向きにとるものとする.

定理 1.1.1 (コーシーの積分定理).
単一閉曲線 C 上と C の内部を全て含む領域で $f(z)$ が正則とすると,

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

が成り立つ.

証明 証明にはグリーンの定理を適用してからコーシー・リーマンの関係式を適用すればよい. □

定理 1.1.2 (正則領域では単一閉曲線の積分路を自由に変形できる).
$f(z)$ は領域 D（単連結領域でなくてもよい）で正則であるものとする．領域 D の中に 2 つの単一閉曲線 C_1 と C_2 があり，C_2 は C_1 の内側の領域に含まれていて，C_1 と C_2 に挟まれた領域も D に含まれるものとする．このとき，

$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz.$$

定理 1.1.3 (多重連結領域での積分).
$f(z)$ が単一閉曲線 C 上で正則かつ，C の内部を全て含む領域 D の内部に複数の非正則な領域 $D_i(i = 1, \cdots, n)$ があるとき，各 D_i を取り囲むリング状の正則領域 R_i 上の単一閉曲線を C_i とすれば，

$$\oint_C f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i} f(z)dz.$$

定理 1.1.4 (コーシーの積分公式).
単一閉曲線 C 上と C の内部を全て含む領域 D で $f(z)$ が正則とする．
このとき，$a \in D$ とすると（a を C の内部の点とすると），

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz.$$

証明 定理 1.1.2 より，積分路 C は向きさえ同じなら，D から点 a を除いた領域内のどのような単一閉曲線でも積分結果に影響しないから，a を中心とする半径 ρ の円で置き換えることができる．同じ理由により，この円の半径はいくら小さくしても積分結果に影響しないから先頭に $\lim_{\rho\to 0}$ を付けても一緒である．すると，積分路上で，$z-a=\rho e^{i\theta}(0 \leq \theta < 2\pi)$，$dz = i\rho e^{i\theta}d\theta$ だから，

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz &= \lim_{\rho\to 0}\oint_{C_\rho}\frac{f(z)}{z-a}dz \\
&= \lim_{\rho\to 0}\oint_0^{2\pi}\frac{f(\rho e^{i\theta}+a)}{\rho e^{i\theta}} i\rho e^{i\theta}d\theta \\
&= \oint_0^{2\pi}\lim_{\rho\to 0} if(\rho e^{i\theta}+a)d\theta \\
&= \oint_0^{2\pi} if(a)d\theta \\
&= 2\pi i f(a)
\end{aligned}$$

以上より，

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz$$

が示せた． □

この定理と同じ条件下で次の定理も成り立つ:

定理 1.1.5 (グルサの定理).
単一閉曲線 C 上と C の内部を全て含む領域 D で $f(z)$ が正則とする.
このとき，$a \in D$ とすると（a を C の内部の点とすると）

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz.$$

証明 数学的帰納法を用いる．$n=0$ のとき，コーシーの積分公式そのもの.
$n=k-1$ まで成立すると仮定すると，

$$\begin{aligned}
f^{(k)}(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{f^{(k-1)}(a+h)-f^{(k)}(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{(k-1)!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-(a+h))^k)} - \frac{f(z)}{(z-a)^k}dz \\
&= \frac{(k-1)!}{2\pi i}\oint_C \lim_{h\to 0}\frac{(z-a)^k-(z-(a+h))^k}{h(z-(a+h))^k(z-a)^k}f(z)dz \\
&= \frac{(k-1)!}{2\pi i}\oint_C \lim_{h\to 0}-\frac{(z-a)^k-\sum_{r=0}^k {}_kC_r(z-a)^{k-r}(-h)^r}{(-h)(z-(a+h))^k(z-a)^k}f(z)dz \\
&= \frac{(k-1)!}{2\pi i}\oint_C \lim_{h\to 0}\frac{\sum_{r=1}^k {}_kC_r(z-a)^{k-r}(-h)^{r-1}}{(z-(a+h))^k(z-a)^k}f(z)dz \\
&= \frac{(k-1)!}{2\pi i}\oint_C \lim_{h\to 0}\frac{{}_kC_1(z-a)^{k-1}(-h)^0}{(z-(a+h))^k(z-a)^k}f(z)dz \\
&= \frac{(k-1)!}{2\pi i}\oint_C \lim_{h\to 0}\frac{kf(z)}{(z-(a+h))^k(z-a)}dz \\
&= \frac{k!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}dz
\end{aligned}$$

これより，$n=k-1$ まで成立すると仮定すると，$n=k$ でも成り立つから，
任意の n で定理が証明された. □

1.1.1 定義 (留数の定義).
$f(z)$ は単一閉曲線 C の内部において，$z=a$ の点以外ではすべて正則であるものとする．このとき，

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$$

を $f(z)$ の $z=a$ における**留数**（Residue）と呼ぶ.

定理 1.1.6 (留数の求め方).
点 a が k 位の極の場合（$k \geq 1$），

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\{(z-a)^k f(z)\}$$

定理 1.1.7 (留数定理).
$f(z)$ が単一閉曲線 C の内部に有限個の孤立特異点 $a_k(k=1,\cdots,n)$ を持ち，C 上とその内部ではそれ以外の点では正則であるものとする．このとき，

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z)$$

証明 定理 1.1.3 の右辺に対し，留数の定義式 1.1.1 を適用すると直ちにこの

定理を得る. □

・・・ここまでやれば，とりあえず複素積分が大体できるようになるかも..