計量条件

計量の共変微分は必ず 0 になる ($\nabla_\alpha g_{\beta\gamma} = 0$)．これを計量条件と呼ぶ．

Proof. 証明には次の事実を使う：

$$g_{\alpha\beta} = \boldsymbol{e}_\alpha \cdot \boldsymbol{e}_\beta \tag{1}$$

$$\partial_\alpha \boldsymbol{e}_\beta = \Gamma^\gamma{}_{\beta\alpha} \boldsymbol{e}_\gamma \tag{2}$$

$$\partial_\alpha \boldsymbol{\omega}^\beta = -\Gamma^\beta{}_{\gamma\alpha} \boldsymbol{\omega}^\gamma \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
&\partial_\alpha (g_{\beta\gamma} \boldsymbol{\omega}^\beta \otimes \boldsymbol{\omega}^\gamma) \\
=&(\partial_\alpha g_{\beta\gamma}) \boldsymbol{\omega}^\beta \otimes \boldsymbol{\omega}^\gamma + g_{\beta\gamma} (\partial_\alpha \boldsymbol{\omega}^\beta) \otimes \boldsymbol{\omega}^\gamma + g_{\beta\gamma} \boldsymbol{\omega}^\beta \otimes (\partial_\alpha \boldsymbol{\omega}^\gamma) \\
=&\partial_\alpha (\boldsymbol{e}_\beta \cdot \boldsymbol{e}_\gamma) \boldsymbol{\omega}^\beta \otimes \boldsymbol{\omega}^\gamma + g_{\beta\gamma} (-\Gamma^\beta{}_{\delta\alpha} \boldsymbol{\omega}^\delta) \otimes \boldsymbol{\omega}^\gamma + g_{\beta\gamma} \boldsymbol{\omega}^\beta \otimes (-\Gamma^\gamma{}_{\delta\alpha} \boldsymbol{\omega}^\delta) \\
=&(\partial_\alpha \boldsymbol{e}_\beta) \cdot \boldsymbol{e}_\gamma \boldsymbol{\omega}^\beta \otimes \boldsymbol{\omega}^\gamma + \boldsymbol{e}_\beta \cdot (\partial_\alpha \boldsymbol{e}_\gamma) \boldsymbol{\omega}^\beta \otimes \boldsymbol{\omega}^\gamma \\
&- g_{\beta\gamma} \Gamma^\beta{}_{\delta\alpha} \boldsymbol{\omega}^\delta \otimes \boldsymbol{\omega}^\gamma - g_{\beta\gamma} \Gamma^\gamma{}_{\delta\alpha} \boldsymbol{\omega}^\beta \otimes \boldsymbol{\omega}^\delta \\
=&(\Gamma^\delta{}_{\beta\alpha} \boldsymbol{e}_\delta) \cdot \boldsymbol{e}_\gamma \boldsymbol{\omega}^\beta \otimes \boldsymbol{\omega}^\gamma + \boldsymbol{e}_\beta \cdot (\Gamma^\delta{}_{\gamma\alpha} \boldsymbol{e}_\delta) \boldsymbol{\omega}^\beta \otimes \boldsymbol{\omega}^\gamma \\
&- g_{\delta\gamma} \Gamma^\delta{}_{\beta\alpha} \boldsymbol{\omega}^\beta \otimes \boldsymbol{\omega}^\gamma - g_{\beta\delta} \Gamma^\delta{}_{\gamma\alpha} \boldsymbol{\omega}^\beta \otimes \boldsymbol{\omega}^\gamma \\
=&(\boldsymbol{e}_\delta \cdot \boldsymbol{e}_\gamma) \Gamma^\delta{}_{\beta\alpha} \boldsymbol{\omega}^\beta \otimes \boldsymbol{\omega}^\gamma + (\boldsymbol{e}_\beta \cdot \boldsymbol{e}_\delta) \Gamma^\delta{}_{\gamma\alpha} \boldsymbol{\omega}^\beta \otimes \boldsymbol{\omega}^\gamma \\
&- g_{\delta\gamma} \Gamma^\delta{}_{\beta\alpha} \boldsymbol{\omega}^\beta \otimes \boldsymbol{\omega}^\gamma - g_{\beta\delta} \Gamma^\delta{}_{\gamma\alpha} \boldsymbol{\omega}^\beta \otimes \boldsymbol{\omega}^\gamma \\
=&g_{\delta\gamma} \Gamma^\delta{}_{\beta\alpha} \boldsymbol{\omega}^\beta \otimes \boldsymbol{\omega}^\gamma + g_{\beta\delta} \Gamma^\delta{}_{\gamma\alpha} \boldsymbol{\omega}^\beta \otimes \boldsymbol{\omega}^\gamma \\
&- g_{\delta\gamma} \Gamma^\delta{}_{\beta\alpha} \boldsymbol{\omega}^\beta \otimes \boldsymbol{\omega}^\gamma - g_{\beta\delta} \Gamma^\delta{}_{\gamma\alpha} \boldsymbol{\omega}^\beta \otimes \boldsymbol{\omega}^\gamma \\
=&(\cancel{g_{\delta\gamma} \Gamma^\delta{}_{\beta\alpha} \boldsymbol{\omega}^\beta} + \cancel{g_{\beta\delta} \Gamma^\delta{}_{\gamma\alpha} \boldsymbol{\omega}^\beta} - \cancel{g_{\delta\gamma} \Gamma^\delta{}_{\beta\alpha} \boldsymbol{\omega}^\beta} - \cancel{g_{\beta\delta} \Gamma^\delta{}_{\gamma\alpha}}) \boldsymbol{\omega}^\beta \otimes \boldsymbol{\omega}^\gamma = 0
\end{aligned}$$

成分が全部 0 なので，結局次が成り立つ．

計量条件

$$\nabla_\alpha g_{\beta\gamma} = 0$$

□