計量による接続係数 (クリストッフェル記号) の表示

接続係数の計量による表示式

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} \left(\partial_\gamma g_{\delta\beta} + \partial_\beta g_{\gamma\delta} - \partial_\delta g_{\beta\gamma} \right)$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha g_{\beta\gamma} =& \partial_\alpha (\boldsymbol{e}_\beta \cdot \boldsymbol{e}_\gamma) \\
=& (\partial_\alpha \boldsymbol{e}_\beta) \cdot \boldsymbol{e}_\gamma + \boldsymbol{e}_\beta \cdot (\partial_\alpha \boldsymbol{e}_\gamma) \\
=& (\Gamma^{\delta}{}_{\beta\alpha} \boldsymbol{e}_\delta) \cdot \boldsymbol{e}_\gamma + \boldsymbol{e}_\beta \cdot (\Gamma^{\delta}{}_{\gamma\alpha} \boldsymbol{e}_\delta) \\
=& (\boldsymbol{e}_\delta \cdot \boldsymbol{e}_\gamma) \Gamma^{\delta}{}_{\beta\alpha} + (\boldsymbol{e}_\beta \cdot \boldsymbol{e}_\delta) \Gamma^{\delta}{}_{\gamma\alpha} \\
=& g_{\delta\gamma} \Gamma^{\delta}{}_{\beta\alpha} + g_{\beta\delta} \Gamma^{\delta}{}_{\gamma\alpha} \\
=& \Gamma_{\gamma\beta\alpha} + \Gamma_{\beta\gamma\alpha}
\end{aligned}$$

したがって,

$$\partial_\alpha g_{\beta\gamma} = \Gamma_{\gamma\beta\alpha} + \Gamma_{\beta\gamma\alpha} \tag{1}$$

これより添字をサイクリックに置き換えることにより,

$$\partial_\beta g_{\gamma\alpha} = \Gamma_{\alpha\gamma\beta} + \Gamma_{\gamma\alpha\beta} \tag{2}$$

$$\partial_\gamma g_{\alpha\beta} = \Gamma_{\beta\alpha\gamma} + \Gamma_{\alpha\beta\gamma} \tag{3}$$

も成り立ちます．ここで，我々の扱う空間が局所的に平坦であることより，基底の 1 階微分が全てゼロになるようなものが存在するから，そのような基底に対して,

$$\begin{aligned}
& \text{全ての}\alpha, \beta\text{に対して}\partial_\alpha \boldsymbol{e}_\beta = 0 \\
& \Leftrightarrow \text{全ての}\alpha, \beta\text{に対して}\partial_\alpha \boldsymbol{e}_\beta = \Gamma^{\gamma}{}_{\beta\alpha} \boldsymbol{e}_\gamma = 0 \\
& \Leftrightarrow \text{全ての}\alpha, \beta, \gamma\text{に対して}\Gamma^{\gamma}{}_{\beta\alpha} = 0
\end{aligned}$$

が成り立ちます，この ${\Gamma^\gamma}_{\beta\alpha}$ に対して，反対称部分 ${\Gamma^\gamma}_{[\beta\alpha]} = \frac{1}{2}({\Gamma^\gamma}_{\beta\alpha} - {\Gamma^\gamma}_{\beta\alpha})$ をとっても当然ゼロのままになります．すると，接続係数の変換より，反対称部分 ${\Gamma^\gamma}_{[\beta\alpha]}$ はテンソルだから，任意の座標変換をしても ${\Gamma^{\gamma'}}_{[\beta'\alpha']} = 0$ のままのはずです．つまりこれは，任意の座標系で ${\Gamma^\gamma}_{[\beta\alpha]} = 0$ つまり，${\Gamma^\gamma}_{\beta\alpha} = {\Gamma^\gamma}_{\alpha\beta}$ が成り立つことを意味します．最初の添字を下げると結局，

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \Gamma_{\alpha\gamma\beta} \tag{4}$$

が成り立つことになります．これを使うと，(3)+(2)−(1) より，

$$\begin{aligned}
&\partial_\gamma g_{\alpha\beta} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \partial_\alpha g_{\beta\gamma} \\
=&(\Gamma_{\beta\alpha\gamma} + \Gamma_{\alpha\beta\gamma}) + (\Gamma_{\alpha\gamma\beta} + \Gamma_{\gamma\alpha\beta}) - (\Gamma_{\gamma\beta\alpha} + \Gamma_{\beta\gamma\alpha}) \\
=&(\Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\alpha\gamma\beta}) + (\Gamma_{\beta\alpha\gamma} - \Gamma_{\beta\gamma\alpha}) + (\Gamma_{\gamma\alpha\beta} - \Gamma_{\gamma\beta\alpha}) \\
=&(\Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\alpha\beta\gamma}) + (\Gamma_{\beta\alpha\gamma} - \Gamma_{\beta\alpha\gamma}) + (\Gamma_{\gamma\alpha\beta} - \Gamma_{\gamma\alpha\beta}) \\
=&2\Gamma_{\alpha\beta\gamma}
\end{aligned}$$

よってこれより，

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\partial_\gamma g_{\alpha\beta} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \partial_\alpha g_{\beta\gamma}\right) \tag{5}$$

が成り立つので，添字を上げて，

接続係数の計量による表示式

$${\Gamma^\alpha}_{\beta\gamma} = g^{\alpha\delta}\Gamma_{\delta\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\delta}\left(\partial_\gamma g_{\delta\beta} + \partial_\beta g_{\gamma\delta} - \partial_\delta g_{\beta\gamma}\right) \tag{6}$$

が得られました． □