単純なローレンツ変換の導出

ある基準となる慣性系 k の時刻を t とし座標を (x, y, z) とする．この k 系に対して k 系の x 軸方向に速度 v で運動する別の慣性系を K 系とし，K 系の k 系に対応する時刻を T，座標を (X, Y, Z) とする．このとき，K 系の k 系に対応する時刻と座標を k 系の時刻と座標で表したものを，k 系から K 系への座標変換と呼ぶ．物理的には座標変換はローレンツ変換と呼ばれるものになることが知られている．ここでは上の状況下で，ローレンツ変換を導く．まず上の状況を数学的に整理して述べよう．次が成り立つことが分かる：

1. $t = 0$ の時の k 系の原点 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ と $T = 0$ の時の K 系の原点 $(X, Y, Z) = (0, 0, 0)$ が重なっていて，そのとき，x 軸は X 軸と，y 軸は Y 軸と，z 軸は Z 軸と重なっているものとする．
2. X 軸は x 軸に対して x 軸正の向きに速度 v で運動しているものとし，それ以外の方向の運動はないものとする．すると，条件 1 より，任意の時刻で，$y = Y$ かつ $z = Z$ である．
3. 条件 2 より，K 系の原点 $(X, Y, Z) = (0, 0, 0)$ は k 系から見て k 系の時刻 t のとき，$y(= Y = 0)$ 座標と $z(= Z = 0)$ 座標は 0 のままであるが，x 座標だけは速度 v で x 軸正の方向に運動することより，$x = vt$ の位置にある．」

我々は一般に k 系の時刻 t，座標 (x, y, z) の点が K 系から見ていつ T，どの点 (X, Y, Z) になっているのかを求めたい．時間と空間の一様性より，それは 1 次式で書けると仮定できることを認めると，A, B, C, D を速度 v に

依存する定数として，条件 1,2,3 より次のように書ける：

$$cT = Act + Bx \quad (A > 0) \tag{1}$$
$$X = Dct + Ex \quad (E > 0) \tag{2}$$
$$Y = y \tag{3}$$
$$Z = z \tag{4}$$

ここで，$A > 0$ は，式 (1) において，k 系の時刻 t が増えるとき，K 系の時刻も増えないと時間の流れる向きが逆になってしまうことより，必要な条件である．また，$E > 0$ は，式 (2) において，k 系の x 軸が増えるとき，K 系の X 軸も増えないと，それぞれの軸が逆向きになってしまうことより，必要な条件である．

さてここで，条件 3 を使って係数 D と E の関係を求めよう．k 系の時刻 t の時，K 系の原点 $(X, Y, Z) = (0, 0, 0)$ は，条件 3 より $(x, y, z) = (ct, 0, 0)$ の位置にある．したがって，式 (2) に $x = vt$ を代入すると，

$$X = 0 = Dct + Ex = Dct + Evt = \left(D + E\frac{v}{c}\right) ct$$

$t \neq 0$ とすると，$D + E\frac{v}{c} = 0$．したがって，

$$D = -\frac{v}{c}E \tag{5}$$

の関係式が成り立つ．

ここまでは光速度不変の原理は仮定していない．問題は次である．k 系の原点 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ から時刻 $t = 0$ に光の球面波を放出したものとする．これが時刻 $t = t$ に $(x, y, z) = (x, y, z)$ に到着したとすると，この間に進んだ距離は光速度 $\times$ 時間 $= ct$ である．一方，進んだ距離の実測値は，$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ であり，これは先ほど求めたものに等しい．したがって，$ct = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ が成り立つはずである．計算しやすいようにこの両辺を 2 乗すると，

$$k \text{ 系} : (ct)^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \Rightarrow (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \tag{6}$$

が成り立つことになる．

ここで光速度不変の原理を使う．k 系の時刻 t，座標 (x, y, z) に対して，K 系の対応する時刻を T，座標を (X, Y, Z) とするとき，光速度不変の原理より，k 系と全く同じ形式で進んだ距離に対する等式が成り立つ．したがって同じ計算をすることにより，

$$K\text{ 系}:(cT)^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \quad \Rightarrow (cT)^2 - X^2 - Y^2 - Z^2 = 0 \tag{7}$$

も成り立つべきである．すると，この式，(7) に (1)，(2)，(3)，(4) を代入すると，

$$\begin{aligned}0 =&(cT)^2 - X^2 - Y^2 - Z^2 \\ =&(Act + Bx)^2 - (Dct + Ex)^2 - y^2 - z^2 \\ =&A^2(ct)^2 + 2ABctx + B^2x^2 - (D^2(ct)^2 + 2DEctx + E^2x^2) - y^2 - z^2 \\ =&(A^2 - D^2)(ct)^2 + 2(AB - DE)ctx - (E^2 - B^2)x^2 - y^2 - z^2\end{aligned}$$

ここで，(6) が成り立つべき式だから，係数を比較すると，

$$A^2 - D^2 = 1 \tag{8}$$

$$AB - DE = 0 \tag{9}$$

$$E^2 - B^2 = 1 \tag{10}$$

が成り立つべきである．ここで，実は $E = A$，$D = B$ である．というのも，(10) 式の両辺に A^2 を掛けてやると，$A^2E^2 - A^2B^2 = A^2$ であるが，式 (9) より，$AB = DE$ なので，これを代入すると，$A^2E^2 - D^2E^2 = A^2$，つまり，$(A^2 - D^2)E^2 = A^2$ であるが，このカッコの中身は式 (8) より，実は 1 であるので，$E^2 = A^2$ が成り立つ．結局，

$$E = A > 0 \tag{11}$$

が成り立つことが分かる．すると，式 (11) を式 (9) に代入すると，

$$D = B \tag{12}$$

が成り立つことが分かる．

ここで，(11) を式 (5) に代入すると，

$$D = -\frac{v}{c}A \tag{13}$$

が成り立つので，これを (8) に代入すると，

$$1 = A^2 - D^2 = A^2 - \left(-\frac{v}{c}A\right)^2 = \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]A^2$$

なので，$A > 0$ に注意すると，

$$A = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{14}$$

が得られる．これより，

$$A = E = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \tag{15}$$

$$B = D = -\frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{16}$$

が得られたので，求める座標変換は，

ローレンツ変換

$$cT = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}ct - \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}x \tag{17}$$

$$X = -\frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}ct + \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}x \tag{18}$$

$$Y = y \tag{19}$$

$$Z = z \tag{20}$$

となることが分かった．