時空の大規模構造

S.W.HAWKING & G.F.R.ELLIS

第 2 章

微分幾何

次の章で議論する時空構造およびこの本の残りの部分で仮定される時空構造はローレンツ計量を持ち，アフィン接続に関連する多様体である．

この章では，§2.1 で多様体の概念を導入し，§2.2 でベクトルとテンソルという多様体上で定義される自然な幾何学的物体の概念を導入する．§2.3 で議論する多様体の写像はテンソルの誘導写像（induced maps of tensors）および，部分多様体の定義を導く．ベクトル場によって定義された誘導写像の微分は §2.4 で定義されるリー微分を与える．多様体の構造のみに依存する別の微分演算子である外微分もまたその節で定義される．この演算は一般化されたストークスの定理において現れる．

追加された構造である接続は §2.5 で導入される．これは共変微分と曲率テンソルを定義する．接続は §2.6 における多様体上の計量（metric）と関係している．曲率テンソルはワイルテンソルとリッチテンソルに分けられる．これらはお互いにビアンキ恒等式によって関連付けられている．

残りの章では，微分幾何におけるいくつかの別の話題が議論される．超曲面上の誘導計量および接続は §2.7 において議論され，ガウス-コダッチの関係式が導かれる．計量によって定義される体積要素は §2.8 で導入され，ガウスの定理の証明に使われる．最後に §2.9 でファイバーバンドルの簡単な議論を，接バンドル，線形バンドルおよび正規直交系を特に強調して与える．

これらは序盤で導入された数多くの概念を洗練された幾何学的手法によって再構築することによって使用可能にする．§2.7 および §2.9 は 1 つか 2 つの箇所で後に使われるが，この本の主要な部分では不可欠ではない．

2.1　多様体

多様体は，本質的に座標パッチによって覆うことができるという点で，ユークリッド空間と局所的に類似の空間である．この構造は微分を定義することを許すが，異なる座標系を本質的に区別しない．そのため多様体の構造によって定義される概念は座標系の選び方に独立なものしかない．我々は多様体の概念の緻密な形式化をいくつかの予備的な定義ののちに与える．

$\mathbb{R}^n$ で n **次元ユークリッド空間**を表すことにしよう．すなわち，n 個の成分を持つ順序対 $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$　$(-\infty < x^i < \infty)$ 全体からなる集合で，通常の位相（開集合と閉集合が通常の方法で定義される）を持つものとしよう．また，$\frac{1}{2}\mathbb{R}^n$ で $\mathbb{R}^n$ の下半分を表すものとしよう．すなわち，$\mathbb{R}^n$ の $x^1 \leqslant 0$ の領域を表すものとする．開集合 $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^n$　（または$\frac{1}{2}\mathbb{R}^n$）から開集合 $\mathscr{O}' \subset \mathbb{R}^m$（または$\frac{1}{2}\mathbb{R}^m$）への写像 ϕ は，$\mathscr{O}'$ 内の点 $\phi(p)$ の座標 $(x'^1, x'^2, \ldots, x'^m)$ が $\mathscr{O}$ の点 p の座標 $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ の r 回連続微分可能関数（r 階微分が存在し連続）であるとき C^r 級であると呼ばれる．もし写像が任意の $r \geq 0$ に対して C^r 級であるとき，その写像は C^∞ 級であると呼ばれる．C^0 級写像は連続写像を意味する．

$\mathbb{R}^n$ の開集合 $\mathscr{O}$ 上の関数 f はコンパクトな閉包を持つ各開集合 $\mathscr{U} \subset \mathscr{O}$ に対して，ある定数 K があって，各点 $p, q \in \mathscr{U}$ に対して，$|f(p) - f(q)| \leqslant K|p-q|$ であるとき局所リプシッツ（Lipschitz）と呼ばれる．ここで $|p|$ は

$$\{(x^1(p))^2 + (x^2(p))^2 + \cdots + (x^n(p))^2\}^{\frac{1}{2}}$$

を意味するものとする．写像 ϕ は $\phi(p)$ の座標が p の座標の局所リプシッツ関数であるとき局所リプシッツと呼ばれる．局所リプシッツ写像は C^{1-} 級と表す．同様に写像 ϕ が C^{r-1} 級であり，$\phi(p)$ の座標の $(r-1)$ 階導関数が

p の座標の局所リプシッツ関数であるとき C^{r-} 級であると定義してもよい．以下では，通常 C^r 級についてのみ述べるが，同様の定義と結果は C^{r-} 級についても成り立つ．

$\mathscr{P}$ を $\mathbb{R}^n$ （または$\frac{1}{2}\mathbb{R}^n$）の任意の集合とするとき，$\mathscr{P}$ から集合 $\mathscr{P}' \subset \mathbb{R}^m$（または$\frac{1}{2}\mathbb{R}^m$）への写像 ϕ は $\mathscr{P}$ を含む開集合 $\mathscr{O}$ から $\mathscr{P}'$ を含む開集合 $\mathscr{O}'$ へのある C^r 級写像の $\mathscr{P}$ から $\mathscr{P}'$ への制限となっているとき，C^r 級写像であると呼ばれる．

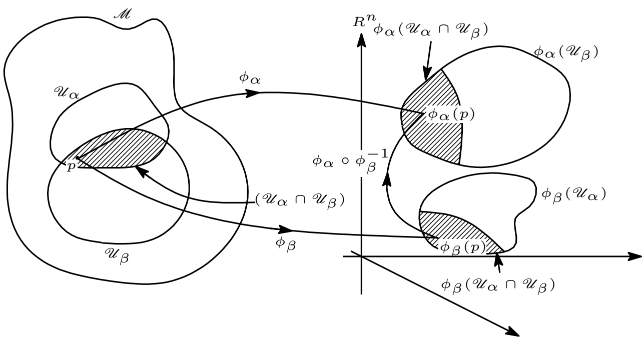

図 4　座標近傍 $\mathscr{U}_\alpha$ と $\mathscr{U}_\beta$ の共通部分において，座標は C^r 級写像 $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ で関係づけられる．

C^r 級 n **次元多様体** $\mathscr{M}$ は，集合 $\mathscr{M}$ が C^r 級アトラス（atlas）$\{\mathscr{U}_\alpha, \phi_\alpha\}$ と一緒になったものである．これはすなわち，$\mathscr{U}$ は $\mathscr{M}$ の部分集合で，ϕ_α は対応する $\mathscr{U}_\alpha$ から $\mathbb{R}^n$ の開集合への一対一写像であるチャート $(\mathscr{U}_\alpha, \phi_\alpha)$ の集まりとして，次を満たすものである．

(1) $\mathscr{U}_\alpha$ 全体は $\mathscr{M}$ を覆う．すなわち，$\mathscr{M} = \bigcup_\alpha \mathscr{U}_\alpha$.

(2) $\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta$ が空でないなら，写像

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta) \to \phi_\alpha(\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta)$$

は $\mathbb{R}^n$ の開部分集合から $\mathbb{R}^n$ の開部分集合への C^r 級写像である（図

4 を見よ).

各 $\mathscr{U}_\alpha$ は写像 ϕ_α によって定義された局所座標 $x^a(a=1,\ldots,n)$ に関する**局所座標近傍**である（つまり，$p \in \mathscr{U}_\alpha$ ならば，p の座標は $\mathbb{R}^n$ における $\phi_\alpha(p)$ の座標である.）．条件 (2) は 2 つの局所座標近傍の重なり合う部分では，片方の近傍の座標はもう片方の近傍の座標の C^r 級関数であり，かつその逆も成り立つという要求である．

与えられた C^r 級アトラスに対して，別のアトラスがあって，それらの合併が全ての $\mathscr{M}$ のための C^r 級アトラスであるとき，このアトラスは与えられたアトラスに対して**互換性（compatible）がある**という．与えられたアトラスに対して互換性のある全てのアトラスからなるアトラスをその多様体の**完全アトラス**と呼ぶ．したがって，完全アトラスは $\mathscr{M}$ を覆う全ての可能な座標系の集合である．

$\mathscr{M}$ の開集合が完全アトラスに属す $\mathscr{U}_\alpha$ の形の集合の合併からなると述べることによって $\mathscr{M}$ の位相は定義される．この位相は各写像 ϕ_α を同相写像にするように働く．

境界のある C^r 級可微分多様体は上で定義した $\mathbb{R}^n$ を $\frac{1}{2}\mathbb{R}^n$ で置き換えたものである．すると，$\mathscr{M}$ の**境界** $\partial\mathscr{M}$ は，$\mathscr{M}$ の写像 ϕ_α による像が $\mathbb{R}^n$ 内の $\frac{1}{2}\mathbb{R}^n$ の境界に移されるような全ての点からなる集合として定義される．$\partial\mathscr{M}$ は境界を持たない $(n-1)$ 次元 C^r 級多様体である．

これらの定義は必要とされるよりより複雑に見えるかもしれない．しかし，簡単な例が一般には 2 つ以上の座標近傍が空間を記述するために必要であることを示す．**2 次元ユークリッド平面** $\mathbb{R}^2$ は明らかに多様体である．長方形状の座標 $(x, y; -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty)$ は 1 つの座標近傍で平面全体を覆う．このとき ϕ は恒等写像である．極座標 (r, θ) は座標近傍 $(r > 0, 0 < \theta < 2\pi)$ を覆う．$\mathbb{R}^2$ を覆うには少なくとも 2 つのそのような座標近傍が必要である．**2 次元円筒** C^2 は点 (x, y) と $(x + 2\pi, y)$ とを同一視することによって $\mathbb{R}^2$ から得られる多様体である．すると，(x, y) は近傍 $(0 < x < 2\pi, -\infty < y < \infty)$ の座標であり，C^2 を覆うには少なくとも 2

つのそのような座標近傍が必要である．**メビウスの帯**は似たような方法で点 (x, y) と $(x+2\pi, -y)$ とを同一視することによって得られる多様体である．**単位 2 次元球面** S^2 は式 $(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=1$ によって $\mathbb{R}^3$ の曲面として特徴付けることができる．すると，

$$(x^2, x^3; -1 < x^2 < 1, -1 < x^3 < 1)$$

は各領域 $x^1 > 0$，$x^1 < 0$ の座標であり，，この曲面を覆うには 6 つのそのような座標近傍が必要である．実際，S^2 を単一の座標近傍で覆うことはできない．n **次元球面** S^n は $\mathbb{R}^{n+1}$ の点集合

$$(x^1)^2+(x^2)^2+\cdots+(x^{n+1})^2=1$$

によって同様に定義することができる．

多様体はその完全アトラスの中に，あるアトラスがあって，全ての空でない共通部分 $\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta$ に対して $\mathscr{U}_\alpha$ と $\mathscr{U}_\beta$ の座標 $(x^1, \ldots, x^n)$ および $(x'^1, \ldots, x'^n)$ に関するヤコビアン $|\partial x^i/\partial x'^j|$ が（訳注：常に）正であるとき，向き付け可能であると呼ばれる．メビウスの帯は向き付け可能でない多様体の例である．

ここまでで与えた多様体の定義はとても一般的なものである．大抵の目的のために次の 2 つの条件が課される．すなわち，$\mathscr{M}$ がハウスドルフであること，および $\mathscr{M}$ がパラコンパクトであることであり，これらは適正な局所的挙動を確保する．

位相空間 $\mathscr{M}$ は次のハウスドルフ分離公理を満たすとき**ハウスドルフ空間**と呼ばれる．これは p，q を $\mathscr{M}$ 内の 2 つの異なる点とするとき $\mathscr{M}$ 内に互いに交わらない開集合 $\mathscr{U}$，$\mathscr{V}$ があって，$p \in \mathscr{U}$，$q \in \mathscr{V}$ とできるとするものである．読者は多様体は常にハウスドルフである必要があると思うかもしれない，しかしこれは事実ではない．たとえば，図 5 の状況を考えてみよう．2 つの直線上の点 b，b' は $x_b = y_{b'} < 0$ であるときに限り同一視するものとする．すると，各点は $\mathbb{R}^1$ の開部分集合に同相な（座標）近傍に含まれる．しかし，a が点 $x=0$，a' が点 $y=0$ であるとき，$a \in \mathscr{U}$，$a' \in \mathscr{V}$ であり，$\mathscr{U}$ と $\mathscr{V}$ の共通部分がないような開近傍 $\mathscr{U}$，$\mathscr{V}$ は存在しない．

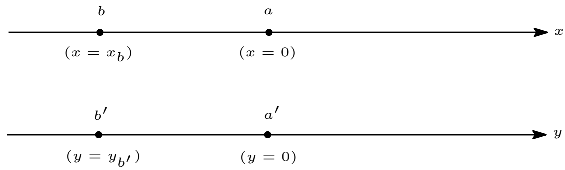

図 5　非ハウスドルフ多様体の例．上の 2 つの線は $x = y < 0$ に関して同一視される．しかし，2 点 $a(x = 0I)$ と $a'(y = 0)$ は同一視されない．

アトラス $\{\mathscr{U}_\alpha, \phi_\alpha\}$ は全ての $p \in \mathscr{M}$ が有限個の集合 $\mathscr{U}_\alpha$ としか共通部分を持たないような開近傍を持つとき**局所有限**であると呼ばれる．$\mathscr{M}$ は全てのアトラス $\{\mathscr{U}_\alpha, \phi_\alpha\}$ に対して，局所有限なアトラス $\{\mathscr{V}_\beta, \psi_\beta\}$ があって，各 $\mathscr{V}_\beta$ はある $\mathscr{U}_\alpha$ に含まれるとき**パラコンパクト**であるという．連結されたハウスドルフ多様体は可算個の基底（すなわち開集合からなる可算個の集合が存在し，どんな開集合もこの集合の要素の合併で表すことができる）を持つとき限りパラコンパクトである (Kobayashi and Nomizu (1963),p.271).

明記されないとき，**全ての扱っている多様体は境界を持たないパラコンパクトな連結 C^∞ 級ハウスドルフ多様体であるものとする．**のちに明らかになるように，我々が $\mathscr{M}$ にある付加的構造を課すとき（アフィン接続の存在，§2.4 を見よ)，パラコンパクト性の条件はそれ以外の制約より自動的に満たされる．

C^k 級多様体 $\mathscr{M}$ 上の**関数** f とは $\mathscr{M}$ から $\mathbb{R}^1$ への写像である．それは任意の局所座標近傍 $\mathscr{U}_\alpha$ 上の f に関する表式 $f \circ \phi_\alpha^{-1}$ が点 p での局所座標の C^r 級関数であるとき，点 p で C^r 級（$r \leqslant k$）であると呼ばれる．そして f は $\mathscr{M}$ の集合 $\mathscr{V}$ 内の各点 $p \in \mathscr{V}$ で C^r 級関数であるとき，集合 $\mathscr{V}$ 上の C^r 級**関数**であると呼ばれる．

我々がのちに使うパラコンパクト多様体の性質は以下の通りである．パラコンパクト C^k 級多様体上の与えられた任意の局所有限なアトラス $\{\mathscr{U}_\alpha, \phi_\alpha\}$ に対して，C^k 級関数 g_α の集合が常に存在し (例えば，Kobayashi and Nomizu (1963),p.272 を見よ)，次を満たす．

(1) 各 α に対し，$\mathscr{M}$ 上で $0 \leqslant g_\alpha \leqslant 1$；
(2) g_α の台，すなわち，集合 $\{p \in \mathscr{M} : g_\alpha(p) \neq 0\}$ の閉包は対応する $\mathscr{U}_\alpha$ に含まれる；
(3) 全ての $p \in \mathscr{M}$ に対して，$\sum_\alpha g_\alpha(p) = 1$.

そのような関数の集まりは 1 **の分割 (partition of unity)** と呼ばれる．この結果は，特に C^∞ 級関数について正しい．しかし，解析関数については明らかに正しくない (解析関数は各点 $p \in \mathscr{M}$ のある近傍で収束冪級数で表すことができるので，全ての開近傍でゼロならどこでもゼロである．)

最後に多様体 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ の直積 $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ は多様体 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ の構造によって自然に構造が定まる多様体である．任意の点 $p \in \mathscr{A}, q \in \mathscr{B}$ に対して，p, q それぞれを含む座標近傍 $\mathscr{U}, \mathscr{V}$ が存在して，点 $(p, q) \in \mathscr{A} \times \mathscr{B}$ は $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ の座標近傍 $\mathscr{U} \times \mathscr{V}$ に含まれる．ここで，その座標 (x^i, y^i) に対して，x^i は $\mathscr{U}$ における p の座標で y^j は $\mathscr{V}$ における q の座標である．