曲がった時空における量子論

既に知られている結果なのでしょうが，曲がった時空において量子論を展開する方法に気付いたので，ここでご紹介します．ここで紹介するのは，非常にコンパクトな結果ですが，理論的に不自然な仮説を含まないので，悪くないと思います．

曲がった時空での 4 元運動量演算子の導出

4 元運動量は $p^\mu = (E/c, p_x, p_y, p_z)$ であるから，量子力学における

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, p_x \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$$

を使うと，

$$\begin{aligned} c\hat{p}_0 &= \hat{E} = i\hbar c\frac{\partial}{\partial x^0} = ci\hbar\partial_0 \\ \therefore \hat{p}_0 &= i\hbar\partial_0 \qquad (1) \\ \hat{p}^1 &= \hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} = -i\hbar\partial_1 \\ \therefore \hat{p}^i &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial x^i} = -i\hbar\partial_i \qquad (2) \end{aligned}$$

が成り立ちます．ここで，ミンコフスキー時空（つまり平らな時空）の計量を $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ とすると，

$$\hat{p}_0 = \eta_{0\nu}\hat{p}^\nu = \hat{p}_0 = i\hbar\partial_0 \qquad (3)$$

$$\hat{p}_i = \eta_{i\nu}\hat{p}^\nu = -\hat{p}^i = i\hbar\partial_i \qquad (4)$$

が得られますので，結局，

$$\hat{p}_\mu = i\hbar\partial_\mu \qquad (5)$$

が成り立ちます．ここで，(5) 式を見ると，この式の右辺はミンコフスキー時空のテンソル ∂_μ の定数倍で書かれている式であることが分かりますの

で，偏微分を共変微分にすれば，曲がった時空でのテンソル式となります．したがって，共変微分を D_μ と表せば，4 元運動量演算子は

$$\hat{p}_\mu = i\hbar D_\mu \tag{6}$$

となります．こうして曲がった時空における 4 元運動量演算子が得られました．

まとめ

曲がった時空中でも，自然な形で 4 元運動量演算子が定義できることが分かったと思います．次に気になるのは曲がった時空における量子論において，何か特有の現象があるかどうかです．この有名な例として，ホーキング放射などの現象があるようですが，私は不勉強のためよくわかりません．とりあえず，曲がった時空中でも 4 元運動量演算子が “自然に” 定義できることが分かったのは，個人的に大変うれしいです．この話を使って，曲がった時空中の場の理論を展開することを当面の目標にしたいです．