1935 年 5 月 15 日 フィジカルレビュー 47 号

物理的実在の量子力学的記述は完全であると考えられるか？

A. アインシュタイン， B. ポドルスキー & N. ローゼン，**プリンストン高級研究所．ニュージャージー州**

(1935 年 3 月 25 日受理)

完全な理論では，各実在の要素に対応する要素が存在する．物理量の実在に対する十分条件は，系を乱すことなく確定的に予測する能力 (possibility) である．量子力学において，非可換演算子によって記述される 2 つの物理量の場合，一方についての知識は，他方についての知識を排除する．すると，(1) 量子力学における波動関数によって与えられる実在の記述は不完全である．または，(2) これら 2 つの量は同時に実在することができない．のいずれかである．ある系と以前相互作用していた別の系でなされる測定の基底上のその系に関する予測を行う問題に関する考察は，(1) が成り立たないなら (2) もまた成り立たないという結果を導く．したがって，これより，波動関数によって与えられる実在の記述は完全ではないという結論に導かれる．

1.

物理理論のいかなる真剣な考察も，どんな理論とも独立な客観的実在と，その理論が操作する物理的概念との相違を考慮しなければならない．これらの概念は，客観的実在に対応することを意図し，これらの概念によってこの実在は描写される．

物理理論の妥当性を評価する際には 2 つの質問をすることができる：(1)「その理論は正しいか？」及び，(2)「その理論によって与えられる説明は完全であるか？」である．これらの質問の両方に肯定的な答えが与えられる場合についてのみ理論は十分であるということができる．理論の正しさは，その理論の帰結と人間の経験との一致の程度によって評価される．物理学において，それ単独で実在についての推論を行うことを可能とするこの経験は，実験と測定という形をとる．我々がここで考察したいのが，第 2 の質問を量子力学に適用することである．

この用語**完全**に割り当てられた意味が何であれ，完全な理論に対して以下の要求が必要なものと思われる：**物理的実在の全ての要素は物理理論において対応物を持ってなければならない．**これをここでは完全性の条件と呼ぶことにしよう．第 2 の質問は，したがって，物理的実在の要素が何であるかを決定することが可能となるとすぐに容易に答えられるようになる．

物理的実在の要素は先験的には哲学的考察によっては決定できない．代わりに，実験と測定の結果に訴えることによって見つけなければならない．実在の包括的な定義は，しかし，ここでの目的のためには不必要である．我々は我々が妥当であるとみなす以下の基準に満足するものとする．もしも，**どんな形であれ系を乱すことなく確定的 (すなわち，1 に等しい確率) にこの物理量の値を予測できるなら，この物理量に対応する物理的実在の要素が存在する．**この基準は，物理的実在を認識する全ての可能な方法を使い果たす (exhausting) ことからかけ離れているにもかかわらず，その条件がそれが起こるように規定されるときはいつでも，少なくとも我々に 1 つそのような方法を提供するように見える．

(この条件は) 必要ではなく，単に実在の条件として十分なもので，この基準は，現実の古典的なだけでなく，量子力学的な考え方とも一致している．

この含まれる考えを説明するために，単一自由度を持つ粒子の挙動の量子力学的説明を考察してみよう．この理論の基本概念は，粒子の挙動を記述するために選ばれた変数の関数である波動関数 ψ によって完全に特徴付けられると仮定される状態の概念である．各物理的に観測可能な量 A に対応して，同じ文字で示すことができる演算子が存在する．

ψ が演算子 A の固有関数である，すなわち，a をある数とするとき，

$$\psi' \equiv A\psi = a\psi, \tag{1}$$

であるなら，物理量 A はその粒子が ψ によって与えられる状態にある場合，確定的な値を持つ．実在の我々の基準に従って，式 (1) が成り立つ ψ によって与えられる状態にある粒子に対して，物理量 A に対応する物理的実在の要素が存在する．例えば，h がプランク定数，p_0 がある定数，そして x が独立変数とするとき，

$$\psi = e^{(2\pi i/h)p_0 x}, \tag{2}$$

が成り立つものとしよう．この粒子の運動量に対応する演算子が

$$p = (h/2\pi i)\partial/\partial x, \tag{3}$$

であることより，

$$\psi' = p\psi = (h/2\pi i)\partial\psi/\partial x = p_0\psi \tag{4}$$

が得られる．かくして，式 (2) によって与えられる状態において，運動量は確定的な値 p_0 を持つ．したがって，式 (2) によって与えられる状態にある粒子の運動量が実在するということを意味する．

その一方で，もし式 (1) が成り立たないならば，もはや物理量 A が特定の値を持つということはできない．これは例えば，粒子の座標の場合が当てはまる．それに対応する演算子を仮に q と呼ぶことにすると，q は独立変数を掛ける演算子となる．したがって，

$$q\psi = x\psi \neq a\psi \tag{5}$$

である．量子力学に従う限り，a から b の間に存在する結果を与える座標の測定である相対確率は

$$P(a,b) = \int_a^b \bar{\psi}\psi dx = \int_a^b dx = b - a \tag{6}$$

であるということしか言えない．この確率が a と独立で，その差 $b-a$ のみに従属することから，全ての座標の値が等確率であることが分かる．

式 (2) によって与えられる状態の粒子に対する座標の値の確定的な値は，したがって予測できないが，直接測定することによってのみ得られうる．そのような測定は，しかしながらその粒子を攪乱し，したがってその状態を変化させる．その座標が決定した後では，粒子はもはや式 (2) によって与えられる状態ではない．量子力学におけるこのことの通常の結論は，**粒子の運動量が知られているとき，その座標は何の物理的実在も持たない**というものである．

より一般的には量子力学では，2 つの物理量 A 及び B に対応する演算子が交換しない，すなわち，$AB \neq BA$ ならば，それら一方に関する正確な知識は他方のそのような知識を妨げるということが示される．更には，後者を実験的に決定しようとするいかなる試みも，最初の知識を破壊するような方法で系の状態を変えてしまう．

これより，(1) **波動関数によって与えられる実在の量子力学的記述は完全でない．**または，(2)**2 つの物理量に対応する演算子が交換しないとき，2 つの量は同時に実在することができない．**のいずれかである．したがって，もしそれら両方が同時に実在するなら，そしてそのため明確な値を持つなら，完全性の条件に従ってこれらの値は完全な記述に入るであろう．もしそのとき，波動関数が実在の完全な記述を提供するなら，それはこれらの値を含むであろう；これらはそのとき，予測可能である．これは実際に起こることではなく，既に述べた代替案が残される．量子力学では，波動関数はそれが対応する状態の完全な記述，またはそれが対応するその状態にある系の物理的実在を含むと通常仮定される．

一見すると，波動関数から得られる情報が系の状態を変えることなく測られるものに正確に一致するように見えるため，この仮定は完全に合理的である．我々は，しかしこの仮定が，上で与えた実在の基準と合わせると，矛盾を導くことを示そう．

2.

この目的のために，時刻 $t = 0$ から $t = T$ まで相互作用することを許す 2 つの系，I 及び II があるものと仮定しよう．その時刻を過ぎるとこれら 2 つの部分の間にはもはやいかなる相互作用もないものと仮定する．ここではさらに，$t = 0$ 以前における 2 つの系の状態が知られているものと仮定する．すると，シュレディンガー方程式の助けを借りて任意のそれ以降の時刻 (ここでは特にどんな $t > T$ に対しても) の複合系 I+II の状態を計算することが可能となる．ここでは対応する波動関数を Ψ によって表そう．ただし，2 つの系のいずれかが相互作用ののちに残された状態を計算することはできない．これは量子力学によれば，更なる測定の助けを借りて**波束の収縮**として知られる過程によってのみ行うことができる．この過程の要点 (essentials) を考えてみよう．

$a_1, a_2, a_3, \cdots$ を系 I に付随するある物理量 A の固有値とし，$u_1(x_1), u_2(x_1), u_3(x_1), \cdots$ を対応する固有関数とする．ただし，x_1 は最初の系を記述するために使われる変数を表すものとする．すると x_1 の関数として考えられる Ψ は

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_2) u_n(x_1), \tag{7}$$

として表される．ただし，x_2 は 2 番目の系を記述するために使われる変数を表す．ここで $\psi_n(x_2)$ は直交関数 $u_n(x_1)$ からなる級数に展開された Ψ の展開係数としてのみ見なされる．いま，(物理) 量 A が測定され，それが値 a_k を持っていることが見いだされたものと仮定しよう．すると測定後は，最初の系は波動関数 $u_k(x_1)$ によって与えられる状態が残り，2 番目の系は波動関数 $\psi_k(x_2)$ によって与えられる状態が残る．これが波束の収縮の過程である；無限級数 (7) によって与えられる波束は単一の項 $\psi_k(x_2) u_k(x_1)$ に収縮する．

関数 $u_n(x_1)$ の組は物理量 A の選択によって決定される．これに代えて，固有値が $b_1, b_2, b_3, \cdots$ であり，固有関数が $v_1(x_1), v_2(x_1), v_3(x_1), \cdots$ であるような別の (物理) 量 B を選んだなら，式 (7) の代わりに展開

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s(x_2) v_s(x_1), \tag{8}$$

を得るはずである．ここで φ_s は新しい係数である．もし今 (物理) 量 B が測定され，その値が b_r であると判明したら，測定後は最初の系が $v_r(x_1)$ で与えられる状態であり，2 番目の系は $\varphi_r(x_2)$ で与えられる状態が残される．したがって，最初の系に対する 2 つの異なる測定の実行の結果として，2 番目の系は 2 つの異なる波動関数を持つ状態が残され得るということが分かる．一方，測定の時刻の時点では，この 2 つの系はもはや相互作用しないので，最初の系に対してされるかもしれないどんなことの結果としても本当の変化は 2 番目の系で起こることができない．これはもちろん，この 2 つの系の間の相互作用の欠如が何を意味するのかということの単なる陳述である．したがって，**2 つの異なる波動関数** (今の例では ψ_k と φ_r) **に** (最初の系との相互作用の後の 2 番目の系に) **同じ実在を割り当てることが可能である**．

さていま，2 つの波動関数 ψ_k と φ_r はある物理量 P と Q にそれぞれ対応する 2 つの非可換演算子の固有関数であることが起こり得る．このようなことが実際に起こりうることは例によって最もうまく示すことができる．2 つの系が 2 つの粒子であると仮定し，ある定数 x_0 に対し，

$$\psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\pi i/h)(x_1 - x_2 + x_0)p} dp, \tag{9}$$

であるものとしよう．A を最初の粒子の運動量としよう；すると，式 (4) で見てきたように，その固有関数は固有値 p に対応する

$$u_p(x_1) = e^{(2\pi i/h)p x_1} \tag{10}$$

である．

ここでは連続スペクトルの場合を扱っているので，式 (7) は今，

$$\psi_p(x_2) = e^{-(2\pi i/h)(x_2-x_0)p} \tag{11}$$

とするとき，

$$\Psi(x_1,x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_p(x_2) u_p(x_1) dp \tag{12}$$

と書かれる．この ψ_p は，しかしながら，2 番目の粒子の運動量の固有値 $-p$ に対応する演算子

$$P = (h/2\pi i)\partial/\partial x_2 \tag{13}$$

の固有関数である．他方，B が最初の粒子の座標なら，それはその固有関数たちに対して，固有値 x に対応する

$$v_x(x_1) = \delta(x_1 - x) \tag{14}$$

を持つ．ここで $\delta(x_1 - x)$ は良く知られているようにデルタ関数である．この場合方程式 (8) は，

$$\Psi(x_1,x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x(x_2) v_x(x_1) dx \tag{15}$$

となる．ここで，

$$\begin{aligned}\varphi_x(x_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\pi i/h)(x-x_2+x_0)p} dp \\ &= h\delta(x - x_2 + x_0)\end{aligned} \tag{16}$$

である．この φ_x は，ただし，2 番目の粒子の座標の固有値 $x + x_0$ に対応する演算子

$$Q = x_2 \tag{17}$$

の固有関数である．

$$PQ - QP = h/2\pi i \tag{18}$$

より，ψ_k と φ_r が 2 つの物理量に対応する 2 つの非可換演算子の固有関数になるということが一般的に可能であることが示されたことになる．

いま，方程式 (7) 及び (8) で考えられる一般的な使用に戻ると，ψ_k と φ_r は確かに，それぞれ固有値 p_k 及び q_r に対応する，ある非可換演算子 P 及び Q の固有関数であると仮定される．このように，A または B のいずれかを測定することによって，(物理) 量 P の値 (すなわち，p_k) または (物理) 量 Q の値 (すなわち，q_r) のいずれでも，2 番目の系をいかなる形でも乱すことなく，確定的に予測ができる．我々の実在の基準に従うと，最初の場合は，(物理) 量 P を実在の要素として考え，2 番目の場合は，(物理) 量 Q を実在の要素として考える必要がある．しかし，既に見てきたように，波動関数 ψ_k 及び φ_r の両方が同じ実在に属している．

以前，ここでは (1) 波動関数によって与えられる実在の量子力学的記述は完全でない．または，(2)2 つの物理量に対応する演算子が交換しないとき，2 つの量は同時に実在することができない．のいずれかであることを証明した．ここでは，波動関数が物理的実在の完全な記述を与えるという仮定から始めて，非可換演算子を持つ 2 つの物理量が同時に実在することが可能であるという結論に到達した．したがって，(1) の否定は唯一の代案である (2) の否定を導く．このように波動関数によって与えられる物理的実在の量子力学的記述は完全ではないという結論を余儀なくされる．

ここでの実在の基準が十分に限定されないという理由で，ある者はこの結論に反対することができるかもしれない．確かに，もしその者が 2 つまたはより多くの物理量が**それらが同時に測定または予測することができる**場合についてのみ実在の同時の要素であると見なせると主張するならば，ここでの結論に到達しないだろう．この観点では，量 P と Q のいずれか一方のみ予測でき，両方同時ではないことより，それらは同時に実在しない．これは P 及び Q の実在を，2 番目の系をいかなる形でも乱さない最初の系に行われた測定の過程に依存させる．いかなる実在の合理的な定義もこれを許可するとは期待できない．

それ故，波動関数が物理的実在の完全な記述を提供しないということを示したにもかかわらず，そのような記述が存在するのかどうかという問題は残されたままである．それにもかかわらず，我々はそのような理論は可能であると信じている．