EPR パラドックス論文の解説

デルタ関数 $\delta(x)$ とは，大雑把にいうと任意の可積分関数 $f(x)$ に対して，

$$f(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_1)dx \tag{19}$$

を満たすような，超関数と呼ばれるものである．そこで，式 (9) において，

$$(\varphi_x(x_2) =)f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\pi i/h)(x-x_2+x_0)p}dp \tag{20}$$

と置いて，式 (19) に代入すると，

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_1)dx & (21)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\pi i/h)(x-x_2+x_0)p}dp\delta(x - x_1)dx & (22)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\pi i/h)(x-x_2+x_0)p}\delta(x - x_1)dx\right]dp & (23)\end{aligned}$$

ここで (23) のカッコのなかの式は，$f(x) = e^{(2\pi i/h)(x-x_2+x_0)p}$ としたときの，(19) 式の形をしているので，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\pi i/h)(x-x_2+x_0)p}\delta(x - x_1)dx = e^{(2\pi i/h)(x_1-x_2+x_0)p} \tag{24}$$

となる．したがって，これより，(23) は

$$\begin{aligned} f(x_1) \quad &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\pi i/h)(x-x_2+x_0)p}\delta(x - x_1)dx\right]dp & (25)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\pi i/h)(x_1-x_2+x_0)p}dp & (26)\end{aligned}$$

となる．これは，本文の式 (9) そのものである．したがって，

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\pi i/h)(x_1-x_2+x_0)p}dp = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\pi i/h)(x-x_2+x_0)p}dp\delta(x - x_1)dx \tag{27}$$

が示されたことになる．次に，

$$\begin{aligned} \varphi_x(x_2) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\pi i/h)(x-x_2+x_0)p}dp, & (28)\\ v_x(x_1) &\equiv \delta(x_1 - x) & (29)\end{aligned}$$

と置いたとき，これらが，$\hat{x_2}$ と $\hat{x_1}$ の固有関数であることを示そう．

いま，$\hat{x}$ を位置 x に対する演算子とすると，$\delta(x - \alpha)$ は固有値 α に対する，固有関数になる：

$$\hat{x}\delta(x - \alpha) = \alpha\delta(x - \alpha) \tag{30}$$

したがって，(29) より，$v_x(x_1)$ は $\hat{x_1}$ の固有値 x に対する固有関数である．

次に，$\varphi_x(x_2)$ について考えよう．デルタ関数の積分表示式より，

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}d\omega \tag{31}$$

が成り立つので，(28) 式の形を得ることを見込んで，$\omega = \dfrac{2\pi}{h}p$ と置くと，$d\omega = \dfrac{2\pi}{h}dp$ より，

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(i2\pi/h)px}\frac{2\pi}{h}dp = \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\pi i/h)xp}dp \tag{32}$$

これより，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\pi i/h)xp}dp = h\delta(x) \tag{33}$$

が成り立つので，$x \to x - x_2 + x_0$ と置き換えると，

$$h\delta(x - x_2 + x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\pi i/h)(x-x_2+x_0)p}dp = \varphi_x(x_2) \tag{34}$$

となることが分かった．デルタ関数は偶関数なので，$\delta(x - x_2 + x_0) = \delta(-(x - x_2 + x_0)) = \delta(x_2 - (x + x_0))$ が成り立つ．また固有関数は 0 以外の数で定数倍しても固有関数のままだから，結局 $\varphi_x(x_2)$ は，$\hat{x_2}$ の固有値 $x + x_0$ に対する固有関数であることが分かる．